Ejercicios Unidad 4

Probabilidad I 2025-2

Entrega: sábado 14 de mayo

1. Sea X una variable aleatoria discreta con función generadora de probabilidades dada por

$$\phi_X(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}, \quad \text{para } 0 < p < 1 \quad \text{y} \quad |s| < \frac{1}{1-p}.$$

   a) Calcule explícitamente las probabilidades $\mathbb{P}(X = k)$ para $k = 1, 2, 3$.
   b) Con base en los valores obtenidos, ¿cuál es la distribución de la variable aleatoria X?

2. Encuentre la función generadora de momentos de las siguientes distribuciones:

   a) Distribución uniforme: $X \sim \text{Unif}(a, b)$
   b) Distribución normal: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

3. Responda las siguientes preguntas usando funciones generadoras de momentos y la fórmula de convolución:

   a) Calcule la distribución de $X_1 + X_2$, donde $X_1 \sim \text{Unif}(a, b)$ y $X_2 \sim \text{Unif}(c, d)$ son variables aleatorias independientes.

   b) ¿Es la distribución de la suma de dos variables aleatorias uniformes independientes también una distribución uniforme? Justifique.
   c) Calcule la distribución de $Y_1 + Y_2$, donde $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y $Y_2 \sim \mathcal{N}(\theta, \lambda^2)$ son vv.aa. independientes.

4. Sea $X_1 \sim \text{Cauchy}(0, \gamma_1)$ y $X_2 \sim \text{Cauchy}(0, \gamma_2)$ dos variables aleatorias independientes centradas en cero, donde

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{\pi\gamma_i} \cdot \frac{\gamma_i^2}{x^2 + \gamma_i^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x), \quad i = 1, 2.$$

   a) Demuestre que la variable aleatoria $X_1 + X_2$ también tiene distribución Cauchy. Para ello:
      - Use la fórmula de convolución para calcular $f_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x-t)\, dt$.
      - Use fracciones parciales para simplificar el integrando.

5. Sea $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x),$$

   y sea $Y = \lfloor X \rfloor$ la parte entera (función piso) de X.

a) Recuerde que para una variable aleatoria discreta Y, se tiene:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X < k + 1).$$

Use esta definición para expresar $\mathbb{P}(Y = k)$ en términos de la función de distribución de X.

b) Calcule explícitamente $\mathbb{P}(Y = k)$ para $k \in \mathbb{N}_0$ usando la función de distribución acumulada de X.

c) Simplifique su expresión y muestre que

$$\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda})e^{-k\lambda}\mathbf{1}_{\mathbb{N}_0}(x).$$

d) Concluya que $Y \sim \text{Geom}(1 - e^{-\lambda})$, es decir, Y tiene distribución geométrica que cuenta el número de fallos antes del primer éxito.

6. Calcule la densidad de las siguientes variables aleatorias definidas como transformaciones de variables con distribución conocida. En cada caso, indique si la distribución obtenida corresponde a una distribución clásica o conocida.

   a) Sea $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ con densidad

   $$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

   Calcule la distribución de $Y = \sqrt{X}$.

   b) Sea $X \sim \text{Pareto}(1, \lambda)$, es decir, con densidad

   $$f_X(x) = \lambda x^{-(\lambda+1)} \mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$$

   Calcule la distribución de $Y = \log(X)$.

   c) Sea $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Calcule la distribución de $Y = \mathrm{e}^{-\lambda X}$.

7. Encuentre la función generadora de momentos, si existe, de una variable aleatoria con función de densidad:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x!(e-1)} \mathbf{1}_{\mathbb{N}}(x)$,

   b) $f(x) = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{|x|}{2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}(x)}$

8. Sea X una variable aleatoria con varianza finita y con función generadora de momentos $M(t)$. Demuestre que:

   a) $\mathbb{E}(X) = M'(0)$

   b) $\mathbb{E}(X^2) = M''(0)$

   c) $\text{Var}(X) = M''(0) - (M'(0))^2$

9. Suponga que tenemos una variable aleatoria $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ y una función de distribución acumulada dada por

   $$F(x) = 1 - \exp(-\sqrt{x}), \quad x \geq 0.$$

a) Use el método de la transformada inversa para obtener una fórmula explícita para una variable aleatoria X con esta función de distribución en términos de U.

b) Genere una muestra de 10,000 valores de X utilizando su fórmula y una secuencia de números aleatorios $U \sim \text{Unif}(0,1)$. Puede usar R, Python o Excel.

c) Calcule la densidad de X

d) Grafique un histograma de los valores simulados y sobrepóngale la densidad calculada en el inciso anterior. Para hacer esto debe escalar la función de densidad por $10000\times$longitud de la barra del histograma.

10. Sea $U \sim \text{Unif}(0,1)$ y considere la función de distribución acumulada

$$F(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x \geq 0.$$

a) Use el método de la transformada inversa para obtener una expresión explícita para una variable aleatoria X con esta función de distribución, en términos de una variable uniforme U.

b) Genere una muestra de 10,000 valores de X utilizando su fórmula y una secuencia de números aleatorios $U \sim \text{Unif}(0,1)$, empleando R, Python o Excel.

c) Grafique un histograma de los valores simulados y sobrepóngale la densidad teórica:

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

11. La densidad de la distribución Beta con parámetros α y β está dada por:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\mathbf{1}_{[0,1]}(x),$$

donde $B(\alpha,\beta)$ es la función Beta normalizadora. Se desea simular una variable aleatoria con distribución $\text{Beta}(3,2)$, que tiene una forma asimétrica, más sesgada hacia 1.

a) Proponga una distribución de referencia $g(x)$ adecuada para aplicar el método de aceptación y rechazo.

b) Calcule la constante $c \geq 1$ tal que $f(x) \leq c \cdot g(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Determine c para la distribución $\text{Beta}(3,2)$.

c) Describa el algoritmo de aceptación y rechazo para generar una muestra de la distribución Beta $\text{Beta}(3,2)$

d) Genere 10,000 valores usando R, Python o Excel aplicando el método de aceptación y rechazo. Grafique el histograma de los valores generados y sobrepóngale la densidad de la distribución Beta $\text{Beta}(3,2)$.

e) Repita el ejercicio con diferentes parámetros $\alpha = 5, \beta = 1$ y compare los resultados en términos de la forma de la distribución generada.

12. Considere la siguiente integral:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Esta integral no tiene una solución elemental, pero puede estimarse usando simulación Monte Carlo.

a) Explique cómo puede interpretarse esta integral como una esperanza matemática de una función de variables aleatorias $X, Y \sim \text{Unif}(0,1)$ independientes.

b) Genere, en R, Python o Excel, $N = 10{,}000$ pares de variables aleatorias (X_i, Y_i) con distribución uniforme en $[0,1] \times [0,1]$, y calcule la estimación Monte Carlo de la integral:

$$\hat{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{e^{-(X_i^2+Y_i^2)}}{1 + X_i^2 + Y_i^2}.$$